

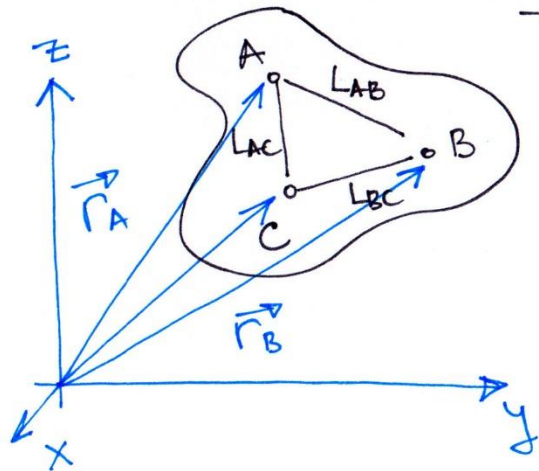
Физика

за софтверско инжењерство

Белешке са предавања 4

24. октобар 2019

ДИНАМИКА КРУТОГ ТЕЛА



→ НЕ МЕНЈА ОБЛИК И ДИМЕНЗИЈЕ ТОКОМ КРЕТАЊА

→ ПЛАНАРНО КРЕТАЊЕ (ТРАНСЛАЦИЈА + РОТАЦИЈА)

→ РОТАЦИОНО КРЕТАЊЕ : УГЛОНА БРЗИНА ОБАВЕ ТАЧКЕ ОКО ПРОИЗВОЛЈНО ИЗАБРАНЕ ОСЕ ЈЕ КОНСТАНТНА (ω)

→ ТРАНСЛАТОРНО ОБЕ ТАЧКЕ СЕ КРЕЋУ НА ИСТИ НАЧИН

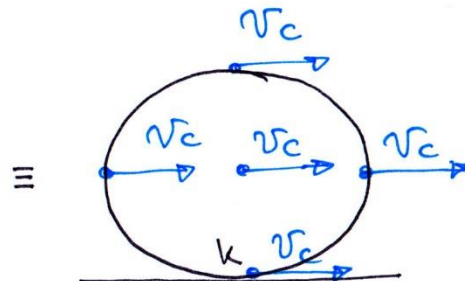
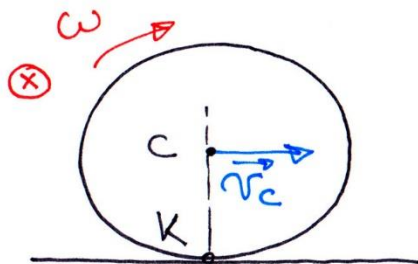


ДОВОЛНО ЈЕ ПОСМАТРАТИ САМО 1 ТАЧКУ → СМ

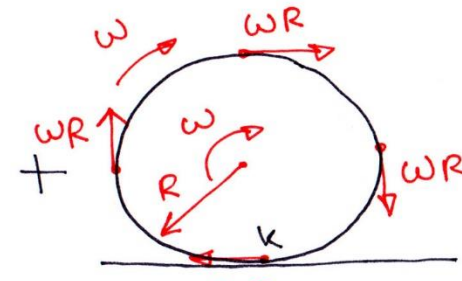
$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt}$$

□ КОТРЉАЊЕ ТОЧКА

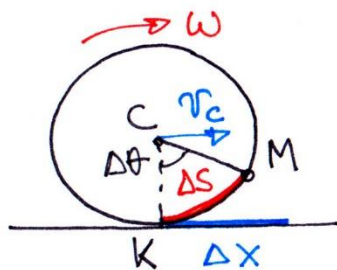


ТРАНСЛАЦИЈА



РОТАЦИЈА

КОТРОЉАЊЕ БЕЗ ПРОКЛИЗАВАЊА



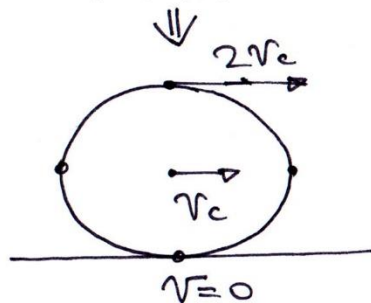
ТАЧКА ДОДИРА У
ОДНОСУ НА ПОДЛОГУ
МОРА ИМАТИ РЕЛАТИВНУ
БРЗИНУ НУЛА $\Rightarrow v_k = 0$

ТАЧКА К СЕ
ЗОВЕ ТРЕЊУЋИ
ЦЕНТАР НУЛТЕ
БРЗИНЕ РОТАЦИЈЕ

$$\Delta S = \Delta x$$

$$R \cdot \Delta\theta = \Delta x \quad / \quad d/dt \quad \Rightarrow$$

$$R \cdot \omega = v_c$$



КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА РОТАЦИЈЕ

→ КРИВО ТЕЛО ПОСМАТРАМО КАО СИСТЕМ
ЕЛЕМЕНТАРНИХ МАСА

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_k m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k (r_k \cdot \omega)^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_k (m_k \cdot r_k^2) \right] \omega^2$$

$$\rightarrow E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ

МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ I [$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]

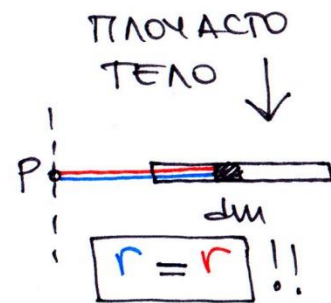
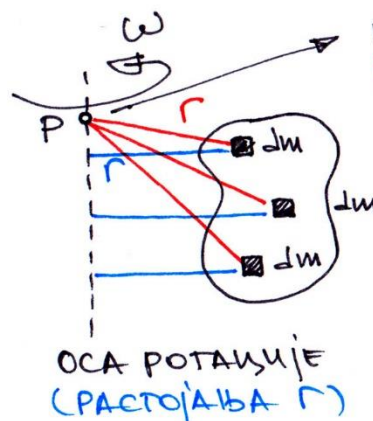
→ МЕРА ИНЕРТНОСТИ ПРИ РОТАЦИОНОМ КРЕТАЊУ →

КОЛИКА ЈЕ МАСА
И
КАКО ЈЕ
РАСПОРЕЂЕНА!

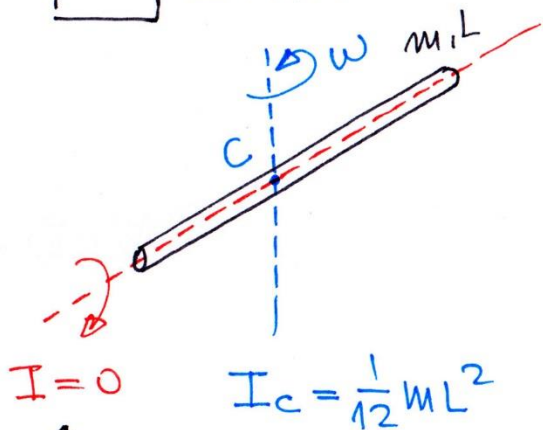
$$I = \sum_k m_k r_k^2 \quad \text{СИСТЕМ М.Т}$$

$$I = \int r^2 dm \quad \text{КРУТО ТЕЛО}$$

→ ВАЖНО ЈЕ ДЕФИНИСАТИ У ОДНОСУ
НА КОЈУ ОСУ РОТАЦИЈЕ ИЛИ ПОЛ
ЈЕ ОДРЕЂЕН МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ

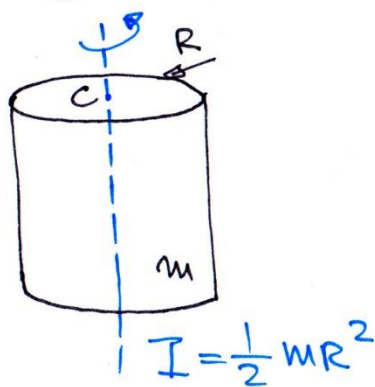


ШТАП

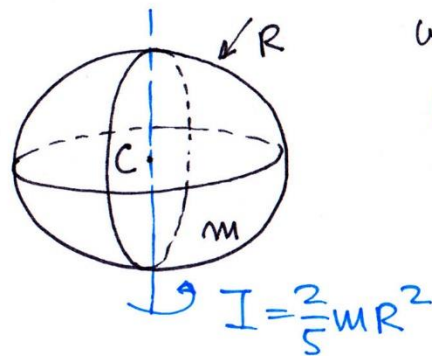


↑ ЛАКШЕ РОТИРАТИ ОВАКО ☺

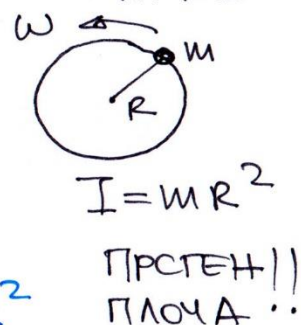
ЦИЛИНДАР (ДИСК)



КУГЛА

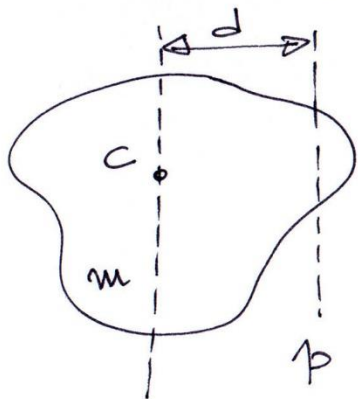


МАТЕР. ТАЧКА



Пр.15 Одредити укупну кинетичку енергију точка (диска) масе m и полупречника R који се по равној хоризонталној подлози котрља без проклизавања.

ТЕОРЕМА О ПАРАЛЕЛНИМ ОСАМА (ШТАЈНЕРОВА ТЕОРЕМА)

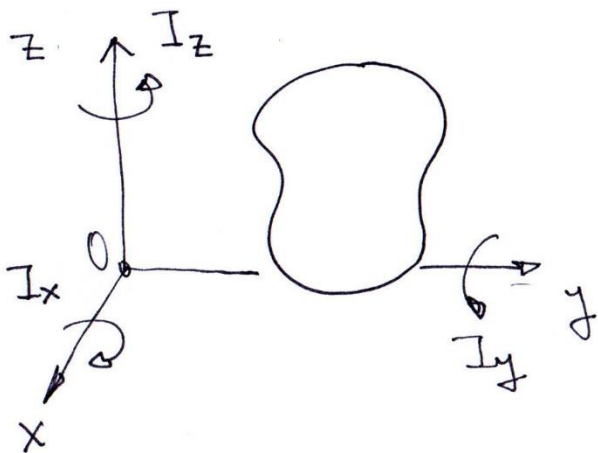


→ Ако је познат момент инерције за осу која пролази кроз центар масе (C)

→ може се одредити момент инерције за било коју другу паралелну осу.

$$I_P = I_C + md^2$$

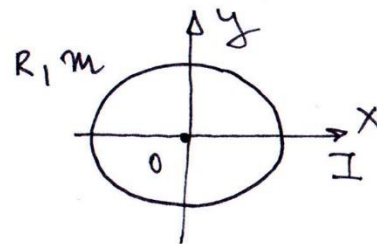
ТЕОРЕМА О НОРМАЛНИМ ОСАМА



$$I_x + I_y + I_z = 2I_0$$

↓
моменти инерције у односу на осе

↓
момент инерције у односу на пол 0



$$I_0 = \frac{1}{2} mR^2$$

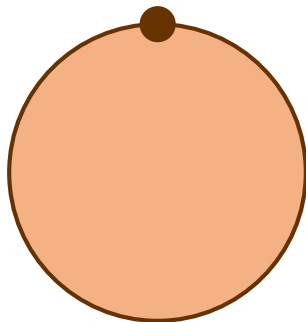
$$I_x + I_y + I_z = 2I_0$$

$$I_z = I_0; I_x = I_y$$

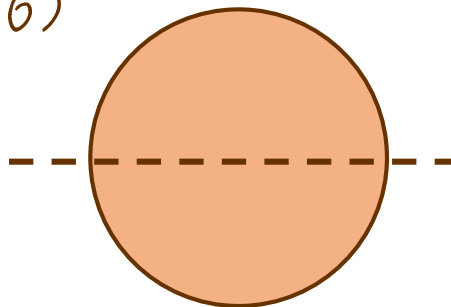
$$I_x = \frac{1}{2} I_0 = \frac{mR^2}{4}$$

Пр.16 Одредити момент инерције диска за означене осе:

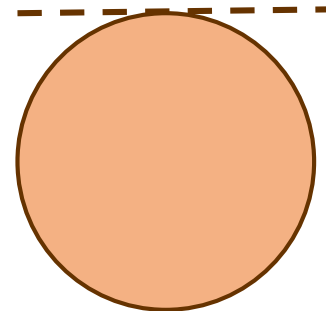
а)



б)

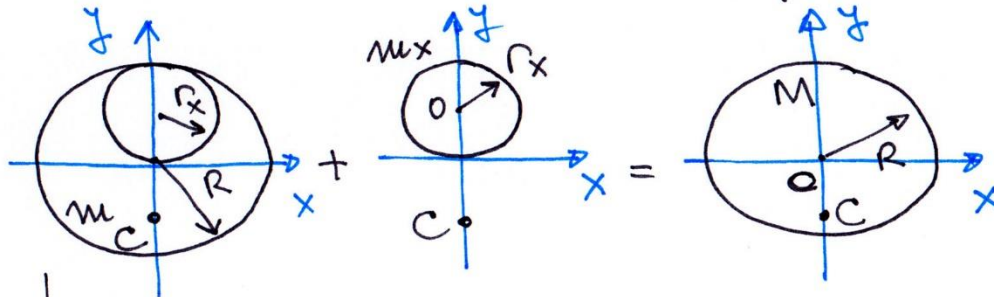


в)





ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИЈЕ



МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ
У ОДНОСУ НА
ЦЕНТАР МАСА

↓
ГДЕ ЈЕ ЦЕНТАР МАСЕ?

$$x_{cm} = 0$$

$$y_{cm} = \frac{0 - m_x \cdot r_x}{m} ; m = M - m_x ; \frac{M}{R^2 \pi} = \frac{m_x}{r_x^2 \pi} \rightarrow M = \dots$$

→ ДА БИ СМЕЛИ ДА ПРИМЕНИМО
СВАКИ ОД МОМЕНАТА ИНЕРЦИЈЕ
МОРА ДА СЕ ОДНОСИ НА ИСТУ
ОСУ РОТАЦИЈЕ → НА ПРИМЕР С.

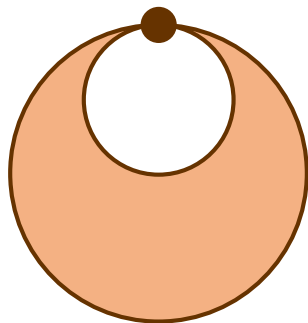
$$I_C^{(M)} = I_O^{(M)} + M \cdot |y_{cm}|^2$$

$$I_O^{(M)} = \frac{1}{2} MR^2$$

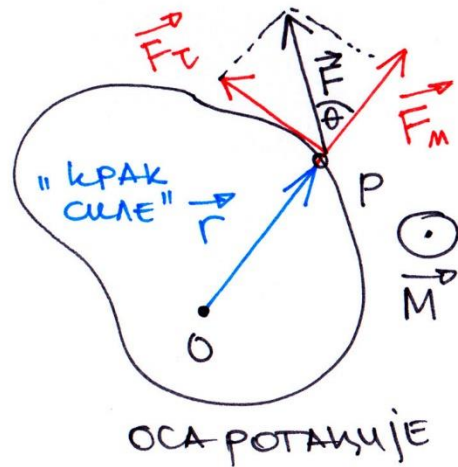
$$I_C^{(m_x)} = I_O^{(m_x)} + m_x \cdot (r + |y_{cm}|)^2$$

$$I_O^{(m_x)} = \frac{1}{2} m_x r_x^2$$

Пр.17 Одредити центар масе и момент инерције у односу на тачку O за танку плочу облика диска полупречника R са кружним исечком полупречника $R/2$. Маса тела је m .



□ МОМЕНТ СИЛЕ \vec{M}



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

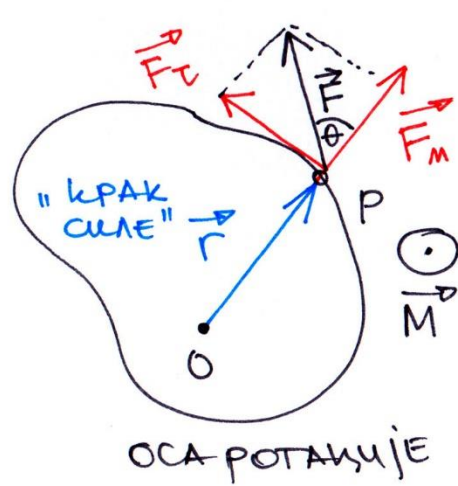
$$\rightarrow |\vec{M}| = M = r \cdot F \sin \theta = r \cdot F_T \rightarrow \text{ТАНГЕНСИЈАЛНА КОМПОНЕНТА СИЛЕ}$$

↓
"КРАК" СИЛЕ

→ ПРАВАЊ МОМЕНТА СИЛЕ ЈЕ НОРМАЛАН НА РАВАН У КОЈОЈ ЛЕЖЕ КРАК СИЛЕ И СИЛА

→ СМЕР ОДГОВАРА СМЕРУ УГЛОНЕ ВРЂИНЕ КОЈУ МОМЕНТ ТЕНТИ ВА ФОРМИРА

МОМЕНТ СИЛЕ \vec{M}



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

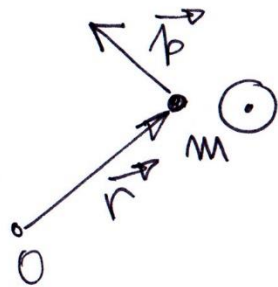
$$\rightarrow |\vec{M}| = M = r \cdot F \sin \theta = r \cdot F_t \rightarrow \text{ТАНГЕНЦИЈАЛНА КОМПОНЕНТА СИЛЕ}$$

↓
"КРАК" СИЛЕ

→ ПРАВАЦ МОМЕНТА СИЛЕ ЈЕ НОРМАЛАН НА РАВАН У КОЈОЈ ЛЕЖЕ КРАК СИЛЕ И СИЛА

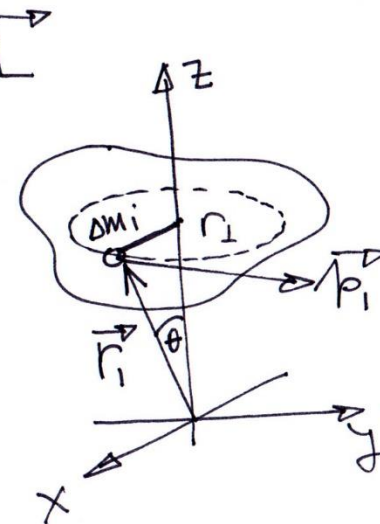
→ СМЕР ОДГОВАРА СМЕРУ УГЛОНЕ БРЗИНЕ КОЈУ МОМЕНТ ТЕНТИ ВА ФОРМИРА

МОМЕНТ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА \vec{L}



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

ТРАНСЛАТОРНО КРЕТАЊЕ МАСЕ m



$$l_i = r_i p_i \sin 90^\circ$$

$$l_i = r_i (\Delta m_i v_i)$$

$$l_{iz} = l_i \sin \theta = r_i \sin \theta (\Delta m_i v_i)$$

$$L_z = \sum l_{iz}$$

$$L_z = \omega \cdot I_z$$

□ 2. ЊУТНОВ ЗАКОН ЗА РОТАЦИЈУ

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = m \left(\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_0 + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m(\vec{r} \times \vec{a})$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{REZ}} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \rightarrow \boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum \vec{M}}$$

→ ВКУПЕН ТЕЛА $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_n = \sum_k \vec{l}_k$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{REZ}}}$$

$$\rightarrow \boxed{I \vec{\alpha} = \sum \vec{M}}$$

□ 2. ЊУТОНОВ ЗАКОН ЗА РОТАЦИЈУ

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = m \left(\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_0 + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m(\vec{r} \times \vec{a})$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{РЕЗ}} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum \vec{M}}$$

→ ВКУП ТЕЛА $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_n = \sum \vec{l}_n$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{РЕЗ}}}$$

$$\rightarrow \boxed{I \vec{\alpha} = \sum \vec{M}}$$

□ ЗАКОН ОДРЖАЊА МОМЕНТА
КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ЗА
ИЗОЛОВАНИ СИСТЕМ

$$\vec{L} = \text{const}$$

□ СТАБИЛНА РАВНОТЕЖА

$$\sum \vec{F}_n = 0$$

$$\vec{p} = \text{const}$$

$$\sum \vec{M}_n = 0$$

$$\vec{L} = \text{const}$$

Пр.18 Одредити зависност угаоне брзине од угла θ за штап масе m и дужине L који ротира у гравитационом пољу окачен једним својим крајем за непокретни ослонац. У почетном тренутку штап мирује у хоризонталном положају. Одредити максималну угаону брзину.

"TOUR DE FORCE" (НАСТАВАК)

→ СИЛА ЗАТЕЗАЊА У КОЊИУ
(ИЛИ УЖЕТУ)

→ S

ПРЕТПОСТАВКЕ: КОЊИУ ЛАК И НЕКРЕТЉИВ

↳ СВАКА ТАЧКА
КОЊИА СЕ КРЕЋЕ
ИСТОМ БРЗИНОМ



- ВЕЛУЈЕ У ТАЧКАМА БЕЖИВАЊА
- ИНТЕНЗИТЕТ ЈЕ ИСТИ У ОБЕ ТАЧКЕ
- ПРАВАЊ ВУЧИ КОЊИА
- СМЕР ОБ ТЕЛА

Пр.19 Два тела различитих маса $m_1 < m_2$ везана су лаким, неистегљивим концем који је пребачен преко котура масе M . Одредити убрзање тела масе m_1 .

Пр.20

Мала куглица масе m налази под правим углом и еластично се судара са штапом масе m и дужине L .
Одредити позицију на штапу где треба да удари куглица да би се након судара куглица и центар масе штапа кретали истим брзинама.